घातांक और करणी

प्रकार – I

$\Longrightarrow$ मानें n को एक धनात्मक पूर्णांक और a को एक वास्तविक संख्या, तो

$a^n = \frac{a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a}{(n\, factors)}$

a^n कहलायेगा “a का n[th] घात” या

जहाँ, a आधार है और n a^n की घात का घातांक.

उदाहरण 3^2 = 3 का वर्ग मूल, 3^3 = 3 का घन मूल आदि

घातांक के नियम:

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ जहाँ $a \neq 0$ और $(m, n) \in I$
2. $a^n \times a^n \times a^p \times \ldots\ldots\ldots\ldots = a^{m+n+p \ldots\ldots\ldots}$
3. $\frac{a^m}{a^n} = \{ \frac{a^{m-n} \; 1}{1^{n-m}} \quad \begin{matrix} if\ m > n \\ if\ n > m \\ if\ m = n \end{matrix}$
4. $(a^m)^n = a^{nm} = (a^n)^m$
5. $a^{m^n} = a^{m \times m \times \ldots\ldots\ldots n}$ गुना $\neq (a^m)^n$
6. $(ab)^n = a^n b^n$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
8. $(-a)^n = \begin{bmatrix} a^n, \text{जहाँ } n \text{ सम है} \\ -a^n, \text{जहाँ } n \text{ विषम है} \end{bmatrix}$

ये नियम भी सही हैं जब n ऋणात्मक या भिन्न होता है.

9. $a^n = a^{(-1)n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

   $= \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \ldots\ldots\ldots n$ गुना

10. $a^{p/q} = a^{1/q \times p} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ धनात्मक पूर्णांक है, q ≠ 0

    $= a^{1/q} \times a^{1/q} \times \ldots\ldots\ldots\ldots p$ गुना

    - $a^m = a^n \Longrightarrow m = n$ जब $a \neq 0, 1$
    - $a^m = b^m \Longrightarrow a = b$

उदहारण: $\left(-\frac{1}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

समाधान $\left(-\frac{1}{343}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(-\frac{1}{7^3}\right)^{-2/3} = (-7^{-3})^{-2/3}$

$= (-7)^{-3 \times -\frac{2}{3}} = (-7)^2 = 49$

उदहारण: $3^{-3} + (-3)^3$

समाधान $3^{-3} + (-3)^3 = \frac{1}{3^3} + (-3)^3 = \frac{1}{27} - 27$

$= \frac{1-729}{27} = -\frac{728}{27}$

उदहारण: If $2^{2x-1} = \frac{1}{8^{(x-3)}}$,तो x =?

समाधान $2^{2x-1} = \frac{1}{8^{(x-3)}} \Longrightarrow 2^{2x-1} = \frac{1}{2^{3(x-3)}}$

$\Longrightarrow 2^{2x-1} = \frac{1}{2^{3x-9}}$

$\Longrightarrow (2^{2x-1})(2^{3x-9}) = 1$

$\Longrightarrow 2^{(2x-1)+(3x-9)} = 1$

$\Longrightarrow 2^{5x-10} = 1 \Longrightarrow 2^{5(x-2)} = 1$

$\Longrightarrow 2^{5(x-2)} = 2^{\circ}$

$\Longrightarrow$ x – 2 = 0 $\Longrightarrow$ x = 2

प्रकार – II

करणी: यदि a परिमेय और n धनात्मक पूर्णांक है और $a^{1/n}$ = $\sqrt[n]{a}$ होगा:
अपरिमेय, तो $\sqrt[n]{a}$ कहलाता है n का करणी या a का n^th मूल. करणी $\sqrt[n]{a}$ के लिए n कहलाता है करणी घातांक या करणी का क्रम और "a" कहलाता है रेडीकेंड. चिह्न $\sqrt{}$ कहलाता है करणी चिह्न

उदहारण $\sqrt{5}$ करणी है 2 का या 5 के वर्ग मूल का
$\sqrt[3]{6}$ करणी है 3 का या 6 के घन मूल का
$\sqrt{6+5}$ करणी नहीं है क्योंकि
6 + $\sqrt{5}$ परिमेय संख्या नहीं है.

- हर करणी एक अपरिमेय संख्या है लेकिन प्रत्येक अपरिमेय संख्या एक करणी नहीं है।
- करणी $a\sqrt[n]{b}$ में , a और b करणी के गुणनखंड कहलाते हैं.

उदहारण $3\sqrt{5}, 2\sqrt{7}, 5\sqrt[3]{7}$

द्विघात करणी**:** करणी 2 (जैसे $\sqrt{a}$) **द्विघात** करणी कहलाता है

उदहारण: $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ **द्विघात** करणी है लेकिन $\sqrt{4} = 4^{1/2}$ **द्विघात** करणी नहीं है क्योंकि $\sqrt{4} = 2$ परिमेय संख्या है.
अतः $\sqrt{4}$ करणी नहीं है.

घन करणी: करणी 3(जैसे $\sqrt[3]{a}$) घन करणी कहलाता है.

उदहारण $\sqrt[3]{9}$ घन करणी है लेकिन $\sqrt[3]{27}$ घन करणी नहीं है क्योंकि $\sqrt[3]{27}$ = 3 परिमेय संख्या है.

करणी पर आधारित महत्वपूर्ण सूत्र

(i) $\sqrt[n]{a^n} = a$

(ii) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

(iii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ और $\frac{k\sqrt[n]{a}}{l\sqrt[n]{b}} = \frac{K}{l}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(iv) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

(v) $\left(\sqrt[n]{a^m}\right) = (a)^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$

(vi) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

(vii) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ और k. $\sqrt[n]{a} \times l.\sqrt[m]{b} = kl.\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{b} = kl.\sqrt[mn]{a^m b^n}$

(viii) $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

(ix) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$

(x) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$

(xi) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \times \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$, जहाँ a और b धनात्मक परिमेय संख्या हैं.

उदहारण: करणी $\sqrt[4]{3 \times 5^4}$ अपने सरलतम रूप में नही हैअतः चिह्न के अंदर संख्या 5^4 का गुणनखंड है. इसका सूचकांक कर्निं के समरूप है. इसका सरलतम रूप है:

$\sqrt[4]{3 \times 5^4} = \sqrt[4]{3}.\sqrt[4]{5^4} = \left(\sqrt[4]{3}\right)(5) = 5.\left(\sqrt[4]{3}\right)$

समरूप करणी: समान अपरिमेय गुणनखंड वाली करणी समरूप करणी कहलाती है

उदहारण: $\sqrt[3]{3}$, $7\sqrt{3}, \frac{2}{5}\sqrt{3}, \sqrt{3}$ आदि समरूप करणी है..

असमान करणी: असमान अपरिमेय गुणनखंड वाली करणी असमान करणी कहलाती है

उदहारण $3\sqrt{3}, 5\sqrt{2}, 6\sqrt{7}$ **असमान करणी हैं.**

प्रकार III

करणी की तुलना: (i) यदि दो करणी एक ही क्रम के हैं, तो वह जिसका रेडिकैंड बड़ा है, दो में से वह बड़ा है

उदहारण $\sqrt[3]{19} > \sqrt[3]{15}, \sqrt{7} > \sqrt{5}, \sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{7}$ etc.

(ii) यदि दो करणी अलग-अलग क्रम के हैं, तो हम उन्हें उसी क्रम के करणी में बदलते हैं।

यह क्रम L.C. M में दिए गए करनी के है

उदहारण: कौन बड़ा है $\sqrt{2}$ *of* $\sqrt[3]{3}$?

समाधान: दी गई करणी 2 व 3 के क्रम में है जिसका L.C.M है 6.

नीचे दिखाए अनुसार प्रत्येक को 6 के क्रम के करणी में बदलें

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = \ 2^{\frac{1}{2}\times\frac{3}{3}} = 2^{\frac{3}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}}$

$= (8)^{1/6} = \ \sqrt[6]{8}$

$= 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}} = 3^{\frac{2}{6}}\,(9)^{\frac{1}{6}}$

$= \sqrt[6]{9}$

$\sqrt[6]{9} > \ \sqrt[6]{8}, so\ \sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$

प्रकार – IV

(a) यदि $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots \ldots \ldots \ldots .\infty}}}$

तो, $y = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$

उदहारण: $y = \sqrt{7 + \sqrt{7 + \sqrt{7 \ldots \ldots \ldots .\infty}}}$

समाधान $y = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$

यहाँ, x = 7

तो $y = \frac{1+\sqrt{1+4\times7}}{2}$

$= \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$\therefore \sqrt{29}$ 5 या 6 के बीच में आता है’

$y = \frac{1+5}{2} = 3$

या, $y = \frac{1+6}{2} = 3.5$

अत:, $3 < y < 3.5$ सही है.

प्रकार – V

एक अपरिमेय संख्या का वर्ग मूल:

जैसा कि हम जान्रते हैं, $(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab$

$\therefore \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = \underbrace{5}_{(a^2+b^2)} + \underbrace{2\sqrt{6}}_{(2ab)}$

$\therefore 5+2\sqrt{6} = \underbrace{5+2\sqrt{2}\sqrt{3}}_{(2ab)}$

$\therefore a = \sqrt{2}\ \&\ b = \ \sqrt{3}$

व $a^2 + b^2 = 5$

$\therefore 5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{2} + \ \sqrt{3})^2$

$\Rightarrow a + b = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \ \sqrt{2} + \ \sqrt{3}$