

इण्टरमीडिएट परीक्षा वर्ष 2025–26

प्रतिदर्श प्रश्न पत्र

विषय— गणित

विषय कोड— 131

संकेतांक— 324

समय— 03 घण्टे 15 मिनट

पूर्णक-100

नोट – प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित है।

निर्देश —

(ग) फलन $\log \cos(e^x)$ का x के सापेक्ष अवकलन है-

1

(i) $-e^x \sin(e^x)/\cos(e^x)$

(ii) $e^x \cos(e^x)/\sin(e^x)$

(iii) $-e^x \cos(e^x)/\sin(e^x)$

(iv) $e^x \sin(e^x)/\cos(e^x)$

(घ) दो सदिशों पर \bar{a} और \bar{b} के परिमाण क्रमशः 1 और 2 हैं तथा $\bar{a} \cdot \bar{b} = 1$ है। इन सदिशों के बीच का कोण होगा-

1

(i) $\pi/2$

(ii) $\pi/4$

(iii) π

(iv) $\pi/3$

(ङ) $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$ का मान है-

1

(i) 0

(ii) -1

(iii) 1

(iv) 3

2. सभी खण्ड हल कीजिए -

(क) $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

1

(ख) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 5x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y = \log x$ की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिये।

1

(ग) यदि एक रेखा के दिक् अनुपात $-18, 12, -4$ हैं तो इसकी दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

1

(घ) सदिश $\bar{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिये।

1

(ङ) यदि $P(A) = \frac{7}{13}$, $P(B) = \frac{12}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{5}{13}$ हैं तो $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।

1

3. सभी खण्ड हल कीजिए -

(क) सिद्ध कीजिए कि यदि $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : N \rightarrow N$ एकेकी है परन्तु आच्छादक नहीं है।

2

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए $A'A = I$

2

(ग) $\int \sin^3 x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

2

(घ) यदि $\bar{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$ तथा $\bar{b} = 4\hat{i} - \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}$ परस्पर समांतर हैं तो λ तथा μ का मान ज्ञात कीजिए।

2

4. सभी खंड हल कीजिए -

- (क) यदि $y - \cos y = x$ है तो इसका अवकलज ज्ञात कीजिए। 2
- (ख) बिंदु $(5, 2, -4)$ से जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ के समान्तर रेखा का सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए। 2
- (ग) क्या $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 5, & x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 2$ पर संतत है? 2
- (घ) यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं और $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ तो $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए। 2

5. सभी खंड हल कीजिए-

- (क) सिद्ध कीजिए कि किसी समतल में स्थित बिंदुओं के समुच्चय में $R = \{(P, Q) : \text{बिंदु } P \text{ की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु } Q \text{ की मूल बिंदु से दूरी के समान हैं\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। 5
- (ख) अवकल समीकरण $x \left(\frac{dy}{dx} \right) + 2y = x^2$ ($x \neq 0$) का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 5
- (ग) x और y ज्ञात कीजिए यदि $x + y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ और $x - y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ है। 5
- (घ) रेखाओं $\bar{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\bar{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5
- (इ) एक पासे पर 1, 2, 3 लाल रंग से और 4, 5, 6 हरे रंग से लिखे गए हैं। 5
इस पासे को उछाला गया। माना A घटना “संख्या सम” है और B घटना “संख्या लाल रंग से लिखी गई है” को निरूपित करते हैं। क्या A तथा B स्वतंत्र हैं?

6. सभी खंड हल कीजिए-

- (क) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ द्वारा प्रदत्त फलन f के स्थानीय उच्चतम और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए। 5
- (ख) सिद्ध कीजिये कि दो सदिशों \vec{a} और \vec{b} के लिए सदैव $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ होता है। 5
- (ग) यदि $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n) \frac{dy}{dx} + mny = 0$ 5
- (घ) अवकल समीकरण $\log \left(\frac{dy}{dx} \right) = 3x + 4y$ का विशेष हल ज्ञात कीजिए। 5
दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = 0$
- (इ) निम्नलिखित अवरोधों के अंतर्गत $z = 5x + 10y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए 5
 $x+2y \leq 120$, $x+y \geq 60$, $x-2y \geq 0$, $x, y \geq 0$

7. निम्नलिखित में से किसी एक खंड को हल कीजिए-

(क) (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ तो $A^2 - 5A + 6I$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

(ii) यदि A तथा B दो सममित आव्यूह हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $(AB - BA)$ एक विषम सममित आव्यूह होगा। 4

(ख) निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए : 8

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4 \quad \text{को आव्यूह विधि से हल कीजिए।}$$

8. निम्नलिखित में से किसी एक खंड को हल कीजिए -

(क) पानी की एक टंकी का आकार, उर्ध्वाधर अक्ष वाले एक उल्टे लम्ब वृतीय शंकु है, जिसका शीर्ष नीचे है। इसका अर्द्धशीर्ष कोण $\theta = \tan^{-1}(0.5)$ है। इसमें 5 मी 3 /मिनट की दर से पानी भरा जाता है। पानी के स्तर के बढ़ने की दर उस क्षण ज्ञात कीजिए जब टंकी में पानी की ऊँचाई 4 मी. है।

(ख) सिद्ध कीजिए कि दी हुई त्रियक ऊँचाई और महतम आयतन वाले शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ है। 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खंड को हल कीजिए -

(क) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 8

(ख) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8